# 1 5.1 Εφαπτομένες από σημείο προς καμπύλη.

Έστω $P=(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο στο προβολικό επίπεδο και $V(F)$ μια καμπύλη βαθμού $d$. Πόσες και ποιές εφαπτομένες μπορούμε να φέρουμε από το σημείο $P$ προς την καμπύλη;

Η εφαπτομένη σε ένα σημείο $(x_1,y_1,z_1)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)X+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)Y+\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)Z=0.$$

Θέλουμε η εφαπτομένη να διέρχεται από το σημείο $P=(x_0,y_0,z_0)$ άρα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)x_0+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)y_0+\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)z_0=0.$$

Για να βρούμε τις εφαπτομένες από το σημείο $P$ προς την καμπύλη πρέπει να βρούμε όλα τα σημεία $(x_1,y_1,z_1)$ που είναι σημεία της καμπύλης και ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Τα σημεία, λοιπόν, $(x_1,y_1,z_1)$ είναι λύσεις του συστήματος:

$$F(X,Y,Z)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)x_0+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)y_0+\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)z_0=0.$$

Από το θεώρημα του *Bezout* έχουμε $d(d-1)$ το πολύ κοινά σημεία, $d(d-1)$ ακριβώς κοινά σημεία αν λάβουμε υπόψη και τις πολλαπλότητες τομής. Γενικά, λοιπόν, από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε $d(d-1)$ εφαπτόμενες προς καμπύλη βαθμού $d$.

Σε ειδικές όμως περιπτώσεις μπορεί να έχουμε λιγότερες. Αυτό οφείλεται είτε σε κάποιες εφαπτομένες που είναι διεφαπτομένες (εφάπτονται, δηλαδή, πάνω από μια φορά στην καμπύλη), είτε σε ευθείες που διέρχονται από ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης. Ειδικά στην περίπτωση που το σημείο $P$ είναι σημείο της καμπύλης $V(F)$ τότε η εφαπτόμενη $L$ στο σημείο αυτό υπολογίζεται τουλάχιστον $I(F,L;P)$ φορές, αριθμός που συμπεριλαμβάνεται στο συνολικό $d(d-1)$.

Για παράδειγμα, από ένα σημείο $P$ προς μια λεία κυβική καμπύλη μπορούμε να φέρουμε $6=2\cdot 3$ εφαπτόμενες. Αν το σημείο $P$ είναι σημείο καμπής της κυβικής τότε μπορούμε να φέρουμε μόνο τρείς εφαπτόμενες προς την κυβική, γιατί η εφαπτόμενη υπολογίζεται τρείς φορές στο 6. Ενώ, αν το σημείο $P$ είναι σημείο της καμπύλης που δεν είναι σημείο καμπής τότε μπορούμε να φέρουμε 4 εφαπτόμενες προς την καμπύλη γιατί η εφαπτόμενη στο σημείο $P$ υπολογίζεται δύο φορές στο 6.

**Παράδειγμα 5.1.1** Έστω η κυβική καμπύλη

$$V(ZY^2-X^3+XZ^2)$$

και $P = (0,1,0)$ είναι ένα σημείο της που είναι σημείο καμπής. (Η εφαπτομένη στο $P$ είναι η ευθεία $V(Z)$ που τέμνει την καμπύλη μόνο στο $P$). Για να βρούμε τις εφαπτόμενες που μπορούμε να φέρουμε από το $P$ προς την καμπύλη, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{gathered} ZY^2 - X^3 + XZ^2 = 0 \\ 0(-3X^2 + Z^2) + 1(2YZ) + 0(Y^2 + 2XZ) = 0. \end{gathered}$$

Δηλαδή το:

$$\begin{gathered} ZY^2 - X^3 + XZ^2 = 0 \\ YZ = 0. \end{gathered}$$

Το σύστημα έχει λύσεις το $P = (0,1,0)$ και τα τρία σημεία $(-1,0,1), (0,0,1), (1,0,1)$. Το $P$ είναι τριπλή λύση, επειδή είναι σημείο καμπής. Άρα από το $P$ μπορούμε να φέρουμε έξι εφαπτόμενες προς την καμπύλη, τρείς φορές υπολογίζεται η εφαπτομένη στο σημείο $P$, η $Z = 0$. Οι εξισώσεις των υπολοίπων τριών είναι εύκολο να βρεθούν επειδή ξέρουμε δύο σημεία για κάθε εφαπτόμενη, δηλαδή είναι:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X + Z, \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X, \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X - Z.$$

**Άσκηση 5.1.2** Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες που μπορείτε να φέρετε από το σημείο $(10,0,11)$ προς την καμπύλη $V(ZY^2 - X^3 + XZ^2)$.